MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

L'objet du problème est de déterminer la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

PARTIE I

Étude de solutions particulières de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + y = \frac{1}{x} \quad \text{sur} \quad I =]0, +\infty[.$$

1. Montrer que, pour tout x élément de I, les intégrales :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \quad \text{ont un sens.}$$

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \text{ont un sens.}$$

2. En posant, par exemple, $u(x) = u(1) + \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$, montrer que u est dérivable sur I.

Montrer que v est dérivable sur I.

Expliciter $u'(x)$ et $v'(x)$.

3. Montrer que $u(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers 0^+. On notera cette limite λ.

4. Démontrer que $v(x) + \ln x = \int_1^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

En déduire que $v(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0^+.

5. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \cos x \times u(x) - \sin x \times v(x).$$

a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E).

b. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Donner la forme des solutions de $y'' + y = 0$. Montrer que toute solution de l'équation de $y'' + y = 0$, ayant une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, est nulle. En déduire que f est la seule solution de (E) ayant une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On notera que cette limite finie est nulle.

d. Montrer que lorsque x tend vers 0^+, f a une limite finie que l'on exprimera en fonction de λ.

A SUIVRE

PARTIE II

Étude d'une fonction définie par une intégrale.

On suposera que : $\alpha \geqslant 0$.

1. Étudier suivant les valeurs de α et du réel x la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. On notera $g_\alpha(x)$ la valeur de cette intégrale si elle existe (on pourra envisager les cas : $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$).

2. Soit x_0 un élément de I et h un réel tel que $|h| \leqslant \frac{x_0}{2}$.

   a. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, |e^{-th} - 1 + th| \leqslant \frac{t^2h^2}{2} e^{\frac{hx_0}{2}}$.

   b. Montrer que $|g_\alpha(x_0 + h) - g_\alpha(x_0) + hg_{\alpha+1}(x_0)| \leqslant \frac{h^2}{2} g_{\alpha+2}\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

   c. En déduire que g_α est dérivable sur I et expliciter sa dérivée.

3. On note g la restriction de g_0 à I.

   a. Montrer que g est solution de (E).

   b. Démontrer que $\forall x > 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

   c. En déduire que $g = f$.

4. *a.* Montrer que :
   $$\forall x \in I \quad 0 < g_0(0) - g(x) \leqslant \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\sqrt{x}}) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}).$$
   (On pourra décomposer $g_0(0) - g(x)$ sous la forme de deux intégrales sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty\right[$.)

   b. En déduire que $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

5. Lorsque x tend vers $+\infty$, en utilisant un changement de variable, démontrer que $x^\alpha g_\alpha(x)$ est un infiniment petit. En déduire un équivalent de l'infiniment petit $g(x)$ (on pourra considérer $g(x) + g_2(x)$).

FIN